Material Apoyo Programación Lineal

Por Wilberto A. Sabillón.

Tal como se discutió previamente, la programación lineal es una técnica que ayuda a tomar decisiones de asignación de recursos (es decir problemas de maximización o minimización). Optimización lineal (como también se le conoce) es un método matemático para determinar la forma de lograr el mejor resultado en un modelo con varios requisitos (restricciones) que tienen una relación lineal.

Si el problema a mano solo presenta dos variables de decisión, el método mas fácil para resolver dicho problema es el método gráfico; con cualquiera de las dos técnicas comúnmente utilizadas como ser: la de los puntos extremos o la de las lineas de iso-costo o iso-utilidad. Sin embargo, si hay más de dos variables, se debe utilizar otro tipo de método, como el Simplex o alguna de sus variantes, como el método de las dos fases.

El método Simplex es un procedimiento iterativo que permite ir mejorando la solución a cada paso. El proceso concluye cuando no es posible seguir mejorando más dicha solución. Partiendo del valor de la función objetivo en un vértice cualquiera (el caso más fácil es cuando todas las restricciones son del tipo menor o igual que, y por consiguiente el origen es parte del polígono o poliedro factible, siendo este el vértice inicial); el método consiste en buscar sucesivamente otro vértice que mejore al anterior. La búsqueda se hace siempre a través de los lados del polígono (o de las aristas del poliedro, si el número de variables es mayor que dos). Cómo el número de vértices (y de aristas) es finito, siempre se podrá encontrar la solución (si esta existe). El método Simplex se basa en la siguiente propiedad: si la función objetivo, f, no toma su valor máximo en el vértice A, entonces hay una arista que parte de A, a lo largo de la cual f aumenta.

En este punto vale recordar que para resolver un problema, primero hay que estudiarlo hasta comprenderlo y por ende poder expresarlo con un modelo matemático (es decir poder modelarlo). Luego de generar un modelo se pasa al sistema extendido; del cual se obtiene la tabla Simplex inicial. A continuación resumo los pasos del algoritmo Simplex; para luego ilustrar más a fondo el funcionamiento del mismo mediante un ejemplo.

Pasos Método Simplex para resolver problemas con restricciones del tipo menor o igual que:

Este tipo de problemas, garantiza que el origen es uno de los vértices y por ende es de los más fáciles de resolver.

1. Se parte generando la forma estándar o el modelo matemático (es decir traducir las palabras en expresiones matemáticas).

2. Se convierten las desigualdades en igualdades, agregando variables de holgura y cambiando el signo de la desigualdad en igualdad (para crear el modelo extendido).

3. Crear la primer tabla Simplex; la cual contendrá, columnas para la base, para los coeficientes de la base, valores del lado derecho y para todas las variables de la tabla extendida. Obviamente, hay una fila para los encabezados, sobre la cual se colocan los coeficientes de la función objetivo. Luego siguen tantas filas como restricciones tenga el problema y por ultimo una fila para representar la función objetivo del problema. El contenido de esta tabla Simplex inicial, se obtiene del paso anterior, es decir se toman los coeficientes de las variables de las restricciones.

4. Los valores de la fila Z, para este tipo de problemas, se pueden obtener despejando la función objetivo; es decir prácticamente cambiando el signo de los coeficientes de dicha función.

5. Buscar la columna pivote. La que tiene el menor valor de los negativos (o el negativo que tenga mayor valor absoluto).

6. Buscar la variable saliente. Dividir la columna LD (lado derecho) entre los valores de la columna pivote (la que se selecciono en el paso anterior).
7. Calcular los valores de la fila entrante. Dividiendo los valores de la fila de la variable saliente entre el valor que se encuentra en la intercepción de la columna pivote y la fila saliente.
8. Calcular los valores de las demás filas. A los valores actuales, se les resta el producto del coeficiente pivote de dicha fila por el valor de la fila entrante.
9. Repetir los pasos 5 a 8, mientras existan valores negativos en la fila Z. Es decir, mientras en la fila z de la ultima tabla generada aparezcan números negativos se deberán crear mas tablas Simplex repitiendo los pasos 5 a 8 recién explicados. Si no aparecen números negativos, se obtuvo la respuesta. El valor que se busca se encuentra en la fila z, en la posición de la columna del lado derecho. En esta misma columna, se deben buscar los valores de las variables de decisión que se encuentren en la base y si cualquier otra variable que no aparezca en la base tendrá un valor de cero.

Existen algunas variaciones a este método, pero para comprender a cabalidad el mismo, nada mejor que un ejemplo que ilustre el algoritmo en acción. Precisamente, para ello se presenta la siguiente sección.

Resolver mediante el método Simplex el siguiente ejercicio sobre la empresa RMC (aditivo y base disolvente), cuyo modelo tal como discutimos en clase se expresa:

1. El resultado del primer paso (el cual se cubrió al discutir el método gráfico) es el siguiente modelo:

Max. Z = $40a + 30b$

Sujeto a:

$$
\begin{aligned}
2/5a + 1/2b &\leq 20 \\
1/5b &\leq 5 \\
3/5a + 3/10b &\leq 21 \\
a\ ,\ b &\geq 0
\end{aligned}
$$

Nota: Se observa que todas las restricciones son del tipo "≤", *por lo tanto se puede resolver mediante el proceso que se resumió en la sección anterior.*

2. Convertir las desigualdades en igualdades.

Se introduce una *variable de holgura* por cada una de las restricciones del tipo ≤, para convertirlas en igualdades, resultando el sistema de ecuaciones lineales:

$$
\begin{aligned}
2/5a + 1/2b + h_0 &= 20 \\
+ 1/5b + h_1 &= 5 \\
3/5a + 3/10b + h_2 &= 21
\end{aligned}
$$

3. A partir de este sistema (o tabla extendida), escribir la tabla Simplex inicial.

En las columnas aparecerán todas las variables de decisión del problema y las variables de holgura (que normalmente nombraremos h_0, h_1, etc). Antes de las variables se deben incluir una columna denominada base, otra denominada coeficientes de la base y una para los valores del lado derecho. En la columna denominada base, por cada restricción, se incluirá las variables de holgura.

4. Para obtener los valores de la fila Z: se multiplican los elementos correspondientes de la columna de la posición a calcular, por los valores de la columna coeficientes de la base; se suman todos estos productos y se les resta el valor de arriba de cada columna. Por ejemplo para la columna LD: [0x20=0]+[0x5=0]+[0x21=0]=0-0=0 y para la columna "a": [0x2/5=0]+[0x0=0]+[0x3/5=0] = 0, menos el valor que de la variable de dicha columna (en este caso 40), por lo tanto tenemos: 0 - 40 = - 40

Esto mismo se hace con las demás variables o como se explico anteriormente se puede simplemente despejar la función objetivo (para este tipo de problemas en los que el origen es un vértice, se puede hacer el despeje); sin embargo cuando el origen no es un vértice, se recurre a pasos adicionales para encontrar un punto de partida.

Con esto terminamos la tabla inicial resultante que se muestra a continuación y ahora solo resta la parte reiterativa del algoritmo.

Tabla Inicial.							
			40	30	0	0	0
Base	**Cb**	**L.D.**	**a**	**b**	**h_0**	**h_1**	**h_2**
h_0	0	20	2/5	1/2	1	0	0
h_1	0	5	0	1/5	0	1	0
h_2	0	21	**3/5**	3/10	0	0	1
Z		0	-40	-30	0	0	0

La parte reiterativa del algoritmo consiste en que por cada tabla que se crea, se debe revisar si se cumple la condición de parada:

Por cada tabla Simplex que elaboramos, debemos observar si en la fila Z no existe ningún valor negativo, si es así se ha alcanzado la solución óptima del problema. En tal caso, se ha llegado al final del algoritmo. El valor máximo (o mínimo) se encuentra en la fila Z, en la columna del lado derecho. De manera similar, los valores de las variables de decisión que se encuentren en la base, se tomaran de esta columna del lado derecho (si la variable de decisión no esta en la base, se le asigna el valor de cero). Si en la fila Z, todavía existen valores negativos, se debe continuar el algoritmo ejecutando los siguientes pasos.

5. Buscar la variable que entrará a la base (variable entrante).

Primero debemos saber qué variable es la que entra en la base. Para ello escogemos la columna de aquel valor que en la fila Z sea el menor de los negativos. En este caso sería la variable *"a" con un* valor en fila Z de -40.

Si existiesen dos o más coeficientes iguales que cumplan la condición anterior (caso de empate), entonces se optará por aquella variable que sea básica (o de decisión). Independientemente, de la variable que se elija en caso de empate, el algoritmo encontrará la misma respuesta. La columna de la variable que entra en la base se llama *columna pivote* (o columna entrante) en color verdecito.

6. Buscar la variable que saldrá de la base (variable saliente).

Una vez obtenida la variable que entra en la base, estamos en condiciones de deducir cual será la variable que sale. Para ello se divide cada término independiente o de la columna lado derecho (LD) entre el elemento correspondiente de la columna pivote (columna entrante), siempre que el resultado sea mayor que cero, y se escoge el mínimo de ellos.

En nuestro caso: 20÷2/5 [=50] , 5÷0 [=N.A.] y 21÷3/5 [=35]

Si hubiera algún elemento menor o igual a cero no se toma en cuenta, y en caso de que todos los elementos de la columna pivote fueran de ésta condición tendríamos una solución no acotada y terminaríamos el problema (ver material sobre casos especiales). El término de la columna pivote que en la división anterior dé lugar al menor cociente positivo, el 3/5, ya que 35 es el menor cociente, indica la fila de la variable que sale de la base, en este caso h_2. Esta fila se llama *fila pivote (o fila saliente)* y se muestra en color azulito.

Si al calcular los cocientes, dos o más son iguales (caso de empate), se escoge aquel cuya variable no sea básica (si es posible).

En la intersección de las columnas de las variables *entrante* y *saliente* tenemos el elemento *pivote de la tabla*, en la presente tabla es **3/5**.

Con esta información estamos listos para elaborar la siguiente tabla. La cual en los encabezados y en la base es prácticamente la misma tabla que la anterior, con la diferencia que en la base en el lugar de la variable saliente, se incluye la entrante con el respectivo coeficiente en la columna coeficientes de la base. Los valores de esta nueva tabla se calculan fila por fila, como se describe a continuación.

7. Encontrar los coeficientes de la nueva tabla, empezando por la fila entrante.

La nueva tabla se empieza por los coeficientes de la fila pivote (antes fila saliente pero ahora le llamaremos fila entrante), la fila de la "*a*" *en este caso. Estos s*e obtienen dividiendo todos los coeficientes de dicha fila entre el elemento pivote, 3/5. La idea es convertir en 1 dicho elemento.

Nueva fila del pivote o fila entrante = (Vieja fila del pivote) / (Elemento Pivote)

Fila pivote	21	**3/5**	3/10	0	0	1
	÷	**÷**	÷	÷	÷	÷
Elemento pivote	3/5	3/5	3/5	3/5	3/5	3/5
	=	**=**	=	=	=	=
Fila nueva o entrante "a"	35	1	1/2	0	0	5/3

A continuación mediante la reducción gaussiana hacemos ceros los restantes términos de su columna, con lo que obtenemos los nuevos coeficientes de las otras filas incluyendo los de la función objetivo, *Z*.

8. Encontrar el resto de los coeficientes de la nueva tabla (es decir el resto de las filas).

Para calcular los demás valores de esta nueva tabla, se realizan los siguientes cálculos:

Nueva fila = (Vieja fila) - (Coeficiente de la vieja fila en la columna de la variable entrante por la fila nueva del pivote o fila entrante)

Veámoslo con un ejemplo una vez calculada la fila del pivote, calculamos la fila de la h_0 para la nueva tabla o Tabla II):

Vieja fila de h_0	20	2/5	1/2	1	0	0
	-	-	-	-	-	-
Coeficiente	2/5	2/5	2/5	2/5	2/5	2/5
	x	x	x	x	x	x
Nueva fila pivote	35	1	1/2	0	0	5/3
	=	=	=	=	=	=
	14	2/5	1/5	0	0	2/3
	=	=	=	=	=	=
Nueva fila de h_0	6	0	3/10	1	0	-2/3

Se realiza un calculo parecido para la fila h_1 y también se puede hacer lo mismo con la fila Z; aunque se prefiere que se repita el proceso previamente explicado para calcular la fila Z (es decir el **paso 4**). Al finalizar nos queda la siguiente tabla Simplex:

Tabla Simplex II.							
			40	30	0	0	0
Base	**Cb**	**L.D.**	**a**	**b**	**h_0**	**h_1**	**h_2**
h_0	0	6	0	**3/10**	1	0	-2/3
h_1	0	5	0	1/5	0	1	0
a	40	35	1	1/2	0	0	5/3
Z		1400	0	-10	0	0	200/3

Se puede observar que no se ha alcanzado la condición de parada ya que en los elementos de la fila Z, hay uno negativo, -10. Por lo tanto hay que repetir el proceso.

La variable que entra en la base es "b", por ser la variable que corresponde a la columna donde se encuentra el coeficiente negativo de mayor valor absoluto, -10.

Para calcular la variable que sale, dividimos los términos de la columna del lado derecho entre los términos correspondientes de la nueva columna pivote: 6÷3/10 [=20] , 5÷ 1/5 [=25] y 35÷ 1/2 [=70] y como el menor cociente positivo es 20, tenemos que la variable que sale es h_0.

El elemento pivote, que ahora hay que hacer 1, es **3/10**.

Es decir, como todavía hay números negativos en la fila Z no hemos alcanzado la condición de parada y tenemos que repetir el algoritmo. Es importante notar, que esta segunda tabla Simplex corresponde a uno de los puntos de esquina que se obtuvo cuando se resolvió este ejercicio mediante el método gráfico. ¿Cuál punto?

Finalizó el ejercicio saltándome varios cálculos para compartirles la siguiente tabla Simplex que nos brinda la respuesta final, ya que en ella si se cumple la condición de parada.

Tabla Simplex III.							
			40	30	0	0	0
Base	**Cb**	**L.D.**	**a**	**b**	**h_0**	**h_1**	**h_2**
b	30	20	0	1	10/3	0	-20/9
h_1	0	1	0	0	-2/3	1	4/9
a	40	25	1	0	-5/3	0	25/9
Z		1600	0	0	100/3	0	400/9

El valor máximo que se observa en la fila Z, en la columna del lado derecho es de 1600 y es la valor máximo a que se puede aspirar bajo las restricciones dadas. Para lograr este valor se deben producir y vender 25 toneladas de aditivo y 20 toneladas de base disolvente. De manera similar, de esta tabla podemos observar que quedara un sobrante de una tonelada de la materia prima II.

Identificando Casos Anómalos (especiales) y Soluciones.

A continuación describo algunos de los casos anómalos y otros detalles a tener en mente, mientras se desarrolla el método Simplex para resolver problemas de programación lineal.

Obtención de la solución: Cuando se ha llegado la condición de parada, es decir cuando ya no tengamos valores negativos en la fila Z; obtenemos el valor de las variables de decisión, las de holgura y el valor óptimo que toma la función objetivo observando los valores de la columna LD. Cualquier variable que no se encuentre en la base, tiene valor de cero.

Infinitas soluciones: Cumplida la condición de parada, si se observa que alguna variable que no está en la base, tiene un 0 en la fila Z, quiere decir que existe otra solución que da el mismo valor óptimo para la función objetivo. Si estamos ante este caso, estamos ante un problema que admite infinitas soluciones, todas ellas comprendidas dentro del segmento (o porción del plano, o región del espacio, dependiendo del número de variables del problema) que define Ax+By=Z0. Si se desea se puede hacer otra iteración haciendo entrar en la base a la variable que tiene el 0 en la fila Z, y se obtendrá otra solución (con el mismo valor para Z).

Solución ilimitada: Si al intentar buscar la variable que debe abandonar la base, nos encontramos que toda la columna de la variable entrante tiene todos sus elementos negativos o nulos, estamos ante un problema que tiene solución ilimitada (no acotada). No hay valor óptimo concreto, ya que al aumentar el valor de las variables se aumenta el valor de la función objetivo, y no se viola ninguna restricción. Es decir estamos ante un problema de no acotación; probablemente debido a una mala formulación del problema en la etapa conceptual. Ya que difícilmente dispondremos de un elemento infinito.

Empate de variable entrante: Se puede optar por cualquiera de ellas, sin que afecte a la solución final, el inconveniente que presenta es que según por cual se opte se harán más o menos iteraciones (tablas Simplex). Se aconseja que se opte a favor de las variables de decisión (básicas), ya que son aquellas las que quedarán en la base cuando se alcance la solución con este método.

Empate de variable saliente: Se puede nuevamente optar por cualquiera de ellas, aunque se puede dar el caso degenerado y entrar en ciclos perpetuos. Para evitarlos en la medida de lo posible, discriminaremos a favor de las variables básicas (ó de decisión) haciendo que se queden en la base. Ante el caso de estar en la primera fase (del método de las Dos Fases), se optará por sacar en caso de empate las variables artificiales.

¿Elemento pivote puede ser 0?: No, ya que siempre se realizan los cocientes entre valores no negativos y mayores que cero.